6 Последовательные испытания. Формула Бернулли

Всякую комбинацию, в которую A входит m раз и $\bar{A}$ входит n-m раз, назовем благоприятной. Количество благоприятных комбинаций равно количеству k способов, которыми можно выбрать m чисел из данных n. Таким образом, оно равно числу сочетаний из n элементов по m, т.е. $k = C_n^m$

Все благоприятные комбинации являются, очевидно, несовместными. Поэтому (на основании аксиомы сложения вероятностей): $P_n(m) = P(B_1) + P(B_2) + ... + P(B_i) = C_n^m p^m q^{n-m}$

Следовательно,

$$P_n(m) = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m} \quad \text{– формула Бернулли} \quad (16)$$

Пример 1. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,6. Какова вероятность того, что 8 выстрелов дадут 5 попаданий?

Решение. Здесь n=8; m=5; p=0,6; q=1-0,6=0,4.

Используя формулу (16), имеем $P_8(5) = \frac{8!}{5!(8-5)!}(0,6)^5(0,4)^3 \approx 0,28$

Часто необходимо знать, при каком значении m вероятность принимает наибольшее значение, т.е. требуется найти *наивероятнейшее число* μ *наступления события* A в данной серии опытов. Можно доказать, что число μ должно удовлетворять двойному неравенству:

$$np-q \le \mu \le np+p$$

Заметим, что сегмент [np-q;np+p], в котором лежит μ, имеет длину (np+p)-(np-q)=p+q=1. Поэтому, если какой-либо из его концов не является целым числом, то между этими концами лежит единственное целое число, и μ определено однозначно. В том случае, если оба конца – целые числа, имеются два наивероятнейших значения: np-q и np+p.

Пример 2. Орудие выпустило 36 снарядов с вероятностью попадания равна 0,85. Найти наивероятнейшее число попаданий в цель.

Решение. $36 \cdot 0,85 - 0,15 \le \mu \le 36 \cdot 0,85 + 0,85$

$30,45 \le \mu \le 31,55$, следовательно, μ=31

Задачи для самостоятельного решения

1. Производство дает 60% продукции первого сорта. Какова вероятность того, что из 6 изделий окажется: а) 4 изделия первого сорта; б) не менее 4 изделий первого сорта.
2. В городе 10 коммерческих банков. У каждого риск банкротства в течении года составляет 10 %. Чему равна вероятность того, что в течении года обанкротится не больше одного банка?
3. При каком числе выстрелов наивероятнейшее число попаданий равно 16, если вероятность промаха в отдельном выстреле равна 0,3.

4. Доля изделий высшего сорта на данном предприятии составляет 31%. Чему равно наивероятнейшее число изделий высшего сорта в случайно отобранной партии из 75 изделий?

7 Вероятность редких событий. Формула Пуассона

Формула Пуассона выводится из формулы Бернулли и после ряда преобразований выглядит следующим образом:

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \qquad (17)$$

где $\lambda = np$ и k – количество раз, которое произойдет редкое событие.

Все значения сведены в таблицу и представлены в приложении 1.

Пример. Устройство состоит из 1000 элементов, работающих независимо один от другого. Вероятность отказа любого элемента в течение некоторого времени t равна 0,002. Найти вероятность того, что за это время откажут ровно 3 элемента.

Решение. $\lambda = np = 1000 \cdot 0{,}002 = 2,\ P_{1000}(3) = 0{,}18$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Среди семян пшеницы высшего сорта 0,04% сорняков. Какова вероятность того, что среди случайно отобранных 5000 семян обнаружиться 5 семян сорняков?

2. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна 0,001. Какова вероятность того, что при 1000 выстрелов будет не более двух попаданий?

3. На предприятии 1000 единиц оборудования определенного вида. Вероятность отказа единицы оборудования в течение часа составляет 0,001. Чему равна вероятность того, что в течение часа откажут как минимум две единицы оборудования?